Click to verify

Angulos en la circunferencia

La circunferencia es una linea curva, cerrada y plana, cuyos puntos están todos a la misma distancia de otro punto, llamado centro. Los ángulos de la circunferencia se clasifican en tres grandes bloques: Ángulos interiores, cuyo vértice está dentro de la circunferencia. En ellos podemos cabe destacar el siguiente caso: Ángulo central, cuyo vértice está en el centro de la circunferencia. Ángulos periféricos, cuyo vértice es un punto de la circunferencia. Entre ellos caben destacar: Ángulo inscrito, que es aquel cuyo vértice está en la circunferencia y los lados son cuerdas. Ángulo semiinscrito, que es aquel cuyo vértice está en la circunferencia y tiene por lados una cuerda y una recta tangente a la circunferencia. Ángulos exteriores, cuyo vértice es un punto que está fuera de la circunferencia. EJEMPLO: EJERCICIOS: 1 Ángulo central El ángulo central tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios. La medida de un arco es la de su ángulo central correspondiente. 2 Ángulo inscrito El ángulo inscrito tiene su vértice está en la circunferencia y sus lados son secantes a ella. Mide la mitad del arco que abarca. 3 Ángulo semi-inscrito El vértice de ángulo semi-inscrito está en la circunferencia, un lado secante y el otro tangente a ella. Mide la mitad del arco que abarca. 4 Ángulo interior Su vértice es interior a la circunferencia y sus lados secantes a ella. Mide la mitad de la suma de las medidas de los arcos que abarcan sus lados y las prolongaciones de sus lados. 5 Ángulo exterior Su vértice es un punto exterior a la circunferencia y los lados de sus ángulos son secantes a ella Su vértice es un punto exterior a la circunferencia y los lados de sus ángulos son uno tangente y otro secante a ella Su vértice es un punto exterior a la circunferencia y los lados de sus ángulos son tangentes a ella 6 Ángulo ex-inscrito El ángulo ex-inscrito tiene su vértice está en la circunferencia y es el ángulo suplementario al ángulo inscrito. Mide la mitad del arco que no abarca el ángulo inscrito. Dibujando líneas que estén dentro de una circunferencia o que tengan relación con ella podemos definir distintos tipos de ángulos , como se aprecia en la figura abajo: Donde: δ (delta) = ángulo inscrito (71,47º), con el vértice sobre la circunferencia y con lados que son cuerdas de la misma. α (alfa) = ángulo semiinscrito (41,68º) , cuyo vértice está en la circunferencia y tiene un lado que es tangente en dicho vértice y el otro que es una cuerda. γ (gama) = ángulo central o del centro (45,42º), con el vértice en el centro de la circunferencia y con sus lados coincidentes con radios . β (beta) = ángulo interior (47,3º), con sus lados que son cuerdas de la circunferencia y con el vértice situado en el interior de la misma. A continuación veremos algunas características de estos ángulos y analizaremos ciertas relaciones entre ellos. Ángulo inscrito en la circunferencia El ángulo inscrito en una circunferencia es aquel que tiene su vértice sobre la circunferencia y cuyos lados son dos cuerdas de la misma (si las cuerdas se prolongan, diremos que son dos rectas secantes). En la figura abajo, vemos varios ángulos inscritos que abarcan o subtienden el arco FD . Todos miden lo mismo (71,47º), por ello, podemos afirmar que “los ángulos inscritos que abarcan el mismo arco son iguales” . En nuestro ejemplo, son iguales los ángulos de vértices B, A, G, H. También debemos recordar que un ángulo inscrito vale la mitad del arco que abarca . El ángulo se expresa en grados. El valor de un arco se expresa en grados y coincide con el valor del ángulo del centro correspondiente. Cuando el arco comprendido entre los radios tiene la longitud de éstos, el valor del ángulo central es un radián , una circunferencia tiene pues 2π radianes. Ángulo central o del centro en la circunferencia El ángulo central o del centro es el que tiene el vértice en el centro de la circunferencia, siendo sus lados dos radios. En la figura siguiente, vemos que el ángulo del centro dibujado, con vértice en O, abarca o subtiende el arco FG . Al respecto, debemos reiterar que “El ángulo del centro mide lo mismo que el arco que abarca” . En la misma figura de la derecha se dibujó un ángulo inscrito (α = 37,3º) que subtiende o abarca el mismo arco que el ángulo del centro (γ = 74,6º) ; en dicha situación (y los valores indicados lo confirman), “ Cuando un ángulo inscrito y un ángulo del centro de una circunferencia abarcan el mismo arco, el ángulo inscrito vale la mitad que el del centro”. Ver: PSU: Geometría; Pregunta 06_2005 Pregunta 10_2005 Es importante notar que dos puntos, A y B, sobre una circunferencia determinan dos arcos y, por tanto, dos ángulos centrales: uno cóncavo (α = 130,68º) y uno convexo (β = 229,32º) , o los dos iguales, que sumarán 360º . Los ángulos inscritos (γ = 65,34º y δ = 114,66 en la figura abajo) que subtienden los mismos arcos que subtienden los ángulos del centro mencionados, serán suplementarios, pues sumarán siempre 180º . Ángulo semiinscrito en la circunferencia El ángulo semiinscrito tiene el vértice A en la circunferencia, siendo sus lados la recta t tangente en A y la cuerda AB (figura a la izquierda). La tangente, que es perpendicular al radio, es lado de dos ángulos semiinscritos y cada uno subtiende un arco diferente. Un ángulo semiiscrito (en la figura es δ = 67,5º) vale la mitad que el ángulo del centro (α = 135º) que abarca el arco AB . Nótese que en la figura están dados los valores de los ángulos y es fácil comprobar lo antes dicho, pero para comprobarlo de modo general, sin saber los valores, calculamos el valor del ángulo central así: , por pertenecer al triángulo isósceles ABC (recordar que los ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180º, y que el triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales). Entonces, calculamos el valor del ángulo δ semiinscrito: El razonamiento es el mismo cuando el ángulo semiiscrito (ζ (zeta) = 112,5º) abarca el otro arco definido por AB . Ángulo interior en la circunferencia El ángulo interior α tiene el vértice en un punto interior de la circunferencia, en el círculo . Sus lados son dos rectas secantes. El ángulo interior , siendo δ y ε los ángulos centrales de los arcos (AC y DB) definidos por las rectas secantes. Vamos a comprobarlo: Consideramos el triángulo escaleno AGD : el ángulo , pues es el ángulo inscrito que abarca el arco AC ; el ángulo , pues es el ángulo inscrito que abarca el arco DB ; entonces el ángulo , por lo tanto, Ángulos exteriores a la circunferencia El ángulo exterior ε tiene el vértice (A) en un punto exterior a la circunferencia. Sus lados son dos rectas secantes (AB y AC) . El ángulo exterior , siendo α y β los ángulos centrales de los dos arcos definidos por las dos rectas secantes. Vamos a comprobarlo: Consideramos el triángulo escaleno ADB: el ángulo , pues es el ángulo inscrito que abarca el arco ED ; el ángulo , pues es el ángulo inscrito que abarca el arco BC ; el ángulo , suplementario de CDB ; por lo tanto, el ángulo Hay otros dos casos de ángulos exteriores, según sus lados sean secantes o tangentes a la circunferencia: El ángulo exterior circunscrito α (figura de la izquierda) tiene los dos lados tangentes a la circunferencia; α = 180º — γ , siendo γ el ángulo central BOC definido por las tangentes. Vamos a comprobarlo: El cuadrilátero ABOC cumple, como tal, que la suma de sus ángulos interiores es 360º. Siendo dos de sus ángulos rectos (β y δ) , resulta que 180º = α + γ , luego α = 180º — γ . El ángulo exterior circunscrito γ tiene un lado secante y otro tangente a la circunferencia (figura a la derecha). El ángulo exterior , siendo α y β los ángulos centrales de los arcos definidos por sus lados. Vamos a comprobarlo: Consideramos el triángulo escaleno ABC : el ángulo , pues es el ángulo inscrito que abarca el arco CD ; el ángulo , pues es el ángulo suplementario de δ , ángulo semiinscrito que abarca el arco BC; el ángulo Fuente Internet: C3%81ngulos_en_las_circunferencias.html Los contenidos de Wikillerato están disponibles bajo una licencia de Creative Commons . Pueden utilizarse y redistribuirse libremente siempre que se reconozca su procedencia. Ver: pepemar/angulo/home.htm Los ángulos en la circunferencia son elementos fundamentales en la geometría que nos permiten entender las relaciones y propiedades de las figuras planas. Estos ángulos en la circunferencia tienen aplicaciones en diversas áreas, desde la geometría pura hasta la ingeniería y la física. A través de su estudio, no solo se puede aprender sobre sus definiciones y fórmulas, sino que también se pueden explorar sus aplicaciones prácticas en situaciones cotidianas y en el diseño de estructuras complejas. Aprenderemos sobre los diferentes tipos de ángulos en una circunferencia, como el ángulo central, el ángulo inscrito y el ángulo exterior, y cómo estos se relacionan con su entorno. Entender estos ángulos en la circunferencia no solo es crucial para los estudiantes de matemáticas, sino también para cualquier persona que desee comprender mejor el diseño y la funcionalidad de las estructuras geométricas. ¿Qué son los ángulos en la circunferencia? Los ángulos en la circunferencia son los ángulos que se forman en o alrededor de una circunferencia. Estos ángulos se pueden clasificar en varias categorías según su ubicación y las líneas que los forman. La comprensión de los ángulos en una circunferencia es esencial para resolver problemas geométricos y realizar cálculos relacionados con la circunferencia y los círculos. En esencia, son fundamentales para entender cómo se relacionan las partes de un círculo, incluyendo su radio, diámetro y arcos. Tipos de ángulos en la circunferencia Ángulo central: definición y propiedades El ángulo central es un tipo de ángulo en la circunferencia cuyo vértice está ubicado en el centro del círculo y cuyas lados son radios que se extienden hacia la circunferencia. Esta característica le da una propiedad distinta: la medida del ángulo central es directamente igual a la medida del arco del círculo que abarca. Por ejemplo, si un ángulo central mide 60 grados, el arco correspondiente también medirá 60 grados. Esta relación es esencial en diversas aplicaciones, como la creación de gráficos y en navegación. Ángulo inscrito: características y teoremas Un ángulo inscrito es aquel cuyo vértice se encuentra en la circunferencia y sus lados son cuerdas del círculo. La propiedad más notable del ángulo inscrito es que mide la mitad del arco que abarca. Por lo tanto, si un ángulo inscrito abarca un arco de 80 grados, el ángulo inscrito medirá 40 grados. Un teorema clave relacionado con los ángulos en la circunferencia es que todos los ángulos inscritos que abarcan el mismo arco son congruentes, lo que significa que tienen la misma medida sin importar su ubicación en la circunferencia. Ángulo semi-inscrito: conceptos y aplicaciones El ángulo semi-inscrito es un tipo de ángulo en la circunferencia donde uno de sus lados es una tangente al círculo y el otro lado es una secante que corta la circunferencia. Este ángulo semi-inscrito también mide la mitad del arco que abarca, similar al ángulo inscrito, pero se aplica en contextos donde se involucran tangentes. La capacidad de calcular los ángulos semi-inscritos es importante en situaciones como el diseño de carriles de carretera y aplicaciones ópticas como los espejos. Ángulo interior: cómo se calcula y su relevancia Los ángulos interiores son aquellos cuyo vértice se encuentra en el interior de la circunferencia, formando un ángulo entre dos cuerdas que se cruzan en el interior. La medida de un ángulo interior es igual a la mitad de la suma de los arcos que abarca. Esto significa que si un ángulo interior abarca dos arcos de 70 y 90 grados, su medida será (70 + 90)/2 = 80 grados. Comprender los ángulos interiores es crucial en la resolución de diversos problemas geométricos, incluidos los triángulos y polígonos que se inscriben dentro de un círculo. Ángulo exterior: definiciones y propiedades El ángulo exterior es el ángulo cuyo vértice se encuentra fuera de la circunferencia. Este ángulo puede ser formado por dos secantes que se cruzan fuera del círculo, un lado secante y otro tangente o por dos tangentes que se tocan en un único punto. Las propiedades de los ángulos exteriores son interesantes porque permiten calcular su medida como la mitad de la diferencia de los arcos que interceptan. Por ejemplo, para un ángulo exterior que intercepta arcos de 160 y 80 grados, su medida sería (160 – 80)/2 = 40 grados. Esta propiedad es extremadamente útil en problemas relacionados con la navegación y las trayectorias de vuelo. Ángulo ex-inscrito: particularidades y aplicación El ángulo ex-inscrito es un caso especial de ángulos en la circunferencia que se forma cuando el vértice del ángulo se encuentra en el exterior de la circunferencia y uno de sus lados es una extensión de una secante que corta la circunferencia, mientras que el otro lado es una tangente. Este ángulo ex-inscrito mide la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos que subyacen. Esta propiedad es crucial en el diseño de caminos y en estructuras donde se requiere precisión, ya que permite calcular las relaciones angulares con exactitud. Aplicaciones prácticas de los ángulos en la circunferencia Uso en la geometría Los ángulos en la circunferencia tienen numerosas aplicaciones en la geometría. Son esenciales para resolver geometría de triángulos, cuadriláteros y otros polígonos que están inscritos en o circunscritos alrededor de un círculo. Además, las propiedades de los ángulos en la circunferencia permiten resolver problemas relacionados con el área y el perímetro de figuras, así como calcular distancias en contextos del mundo real, tales como la arquitectura y el diseño gráfico. Aplicaciones en la física En la física, comprender los ángulos en una circunferencia es fundamental para estudiar fenómenos como el movimiento circular y la dinámica de sistemas rotativos. Por ejemplo, los ángulos en la circunferencia son cruciales en la comprensión del movimiento de objetos en trayectorias circulares y en la elaboración de ecuaciones que describen fuerzas centrífugas y centrípetas. Además, los investigadores utilizan estos ángulos del círculo para analizar ondas y oscilaciones en campos como la acústica y la óptica. Conclusiones Los ángulos en la circunferencia son conceptos clave en matemáticas y física que tienen implicaciones en diversas disciplinas. Desde los ángulos centrales hasta los ángulos ex-inscritos, cada tipo de ángulo nos proporciona información esencial sobre la geometría de las circunferencias. Comprender estas propiedades y teoremas no solo nos permite resolver problemas geométricos en un ámbito académico, sino que también se traduce en aplicaciones prácticas en la vida cotidiana y en profesiones relacionadas con la ciencia y la tecnología. Recursos adicionales para profundizar en el tema Si estás interesado en aprender más sobre los ángulos en la circunferencia y explorar en profundidad su aplicaciones, aquí hay algunos recursos recomendados: El contenido está estructurado de acuerdo con las especificaciones solicitadas y utiliza etiquetas HTML para facilitar la lectura y la comprensión. El artículo abarca todos los temas necesarios relacionados con los ángulos en la circunferencia, sus tipos y usos prácticos. Introducción a los ángulos en la circunferencia Los ángulos en la circunferencia son un aspecto fascinante de la geometría que se encuentra en el corazón de muchas aplicaciones matemáticas y prácticas. Desde la construcción de estructuras hasta el diseño gráfico, entender los patrones y fórmulas que gobiernan estos ángulos es esencial. Pero, ¿qué son exactamente los ángulos en la circunferencia? En términos simples, estamos hablando de la relación entre ángulos y arcos, una conexión que resulta ser verdaderamente poderosa. A medida que avancemos, desglosaremos conceptos complejos en partes más pequeñas, más digeribles, para que puedas ser un maestro en este tema. ¿Qué es un ángulo en la circunferencia? Un ángulo en la circunferencia se forma cuando dos radios de un círculo se cruzan en su borde. Este ángulo se mide en grados y está directamente relacionado con el arco que corta. Pero, ¿por qué deberíamos preocuparnos por eso? Porque los ángulos no son solo números; son herramientas que nos permiten comprender y manipular el espacio que nos rodea. Imagina que estás navegando en un barco, y los ángulos te indican hacia dónde girar: ¡son fundamentales! Tipos de ángulos en la circunferencia Ángulo central Un ángulo central es aquel cuyo vértice está en el centro de la circunferencia y sus lados son radios del círculo. La medida de este ángulo es igual a la medida del arco que intercepta en la circunferencia. Por ejemplo, si el ángulo central mide 60 grados, el arco que corta también medirá 60 grados. Esto es bastante intuitivo, ¿verdad? Ángulo inscrito Por otro lado, un ángulo inscrito tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son cuerdas. Aquí la regla es clara: la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del arco que intercepta. ¿No es increíble cómo dos figuras completamente diferentes pueden tener una relación tan sorprendente? Ángulos opuestos Leer másPuntos equidistantes en un plano desde un centro fijoSi dos ángulos se forman al interceptar un arco, se llaman ángulos opuestos. En este caso, ambos ángulos medirán lo mismo, lo cual es una propiedad fascinante. Esto se puede ver en acciones cotidianas, como al cortar una pizza: si cortas dos piezas que interceptan el mismo arco, los ángulos en puntos opuestos serán iguales. Propiedades de los ángulos en la circunferencia Las propiedades son lo que realmente permite que los matemáticos y científicos se sumerjan en la complejidad de la geometría y encuentren patrones. Así que, echemos un vistazo más profundo a algunas de estas propiedades. Propiedad 1: Relación entre ángulos inscriptos y centrales Como mencionamos antes, el ángulo inscrito es siempre la mitad del ángulo central que corta el mismo arco. Este patrón se repite en toda la circunferencia y es fundamental para entender los ángulos en la circunferencia. Te ayuda a visualizar y planificar exactamente cómo se relacionan los ángulos dentro de un círculo. Propiedad 2: Suma de los ángulos opuestos La suma de los ángulos opuestos en un mismo arco siempre equivale a 180 grados. Tiene un paralelismo bastante cercano con las propiedades de los triángulos, ¿no crees? Estos patrones son la clave para resolver problemas más complejos en geometría. Fórmulas clave para ángulos en la circunferencia Las fórmulas hacen que el análisis de los ángulos en la circunferencia sea mucho más fácil. No hay necesidad de memorizar todo. Al entender algunas fórmulas clave, estarás listo para cualquier reto matemático que enfrentes. Fórmula del ángulo central Leer másFigura con un perímetro de 32 unidadesLa medida del ángulo central es igual a la medida del arco, expresada en grados: Ángulo central = Medida del arco Fórmula del ángulo inscrito La medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del arco que corta: Ángulo inscrito = 1/2 * Medida del arco Fórmula para ángulos opuestos Los ángulos opuestos son iguales: Ángulo 1 = Ángulo 2 Ejemplos prácticos Veamos algunas situaciones cotidianas donde podemos encontrar estas propiedades y fórmulas en acción. Imagina que estás diseñando una rueda de bicicleta, donde cada ángulo que utilices ayuda a mantener un equilibrio preciso. Ejemplo 1: Diseño de círculos en ingeniería Cuando los ingenieros crean estructuras circulares, deben asegurarse de que todos los ángulos inscriptos y centrales se alineen perfectamente. De lo contrario, podrías terminar con una rueda que se desbalancea al rodar. Claro que hay experiencia y cálculo detrás de esto, pero al final del día, se basa en entender los principios de ángulos en la circunferencia. Ejemplo 2: Artes visuales Los artistas también utilizan ángulos en sus obras, ya que un simple cambio en un ángulo puede alterar la percepción de una imagen. Por ejemplo, al definir elementos en un círculo, como patrones o mandalas, comprender estos ángulos puede hacer que el diseño se vea mucho más armonioso. Aplicaciones de los ángulos en la circunferencia Ahora que hemos aprendido sobre los ángulos en la circunferencia y las fórmulas que los rigen, es hora de ver cómo se aplican estas ideas en el mundo real. La geometría no es solo una colección de reglas; es una disciplina que se utiliza cada día en diversas industrias. Arquitectura En arquitectura, el diseño de espacios implica la medida exacta de ángulos para garantizar que las estructuras sean estables y atractivas. Cada arco, cada ventana y cada entrada se basa en estos principios geométricos. La navegación también se basa en ángulos en la circunferencia, usando coordenadas polares y cartografía. Los navegantes deben calcular ángulos precisos para llegar a sus destinos, asegurando que no se pierdan en el mar abierto. Tecnología y programación Incluso en programación de computadoras, los ángulos tienen un papel fundamental. Desde gráficos por computadora hasta el desarrollo de videojuegos, el cálculo de ángulos en la circunferencia ayuda a dar vida a las imágenes y experiencias interactivas. Resumiendo Hemos cubierto una gran cantidad de información sobre ángulos en la circunferencia, desde qué son hasta sus propiedades y aplicaciones prácticas. Pero antes de cerrar este capítulo, vale la pena reflexionar. ¿No es sorprendente cómo un simple concepto geométrico puede tener tantas aplicaciones y profundidades? ¿Los ángulos en la circunferencia siempre son medidos en grados? Generalmente, sí. La mayoría de las medidas de ángulos en la circunferencia se expresan en grados, aunque en matemáticas avanzadas también se utilizan radianes. ¿Cómo puedo determinar el arco asociado a un ángulo inscrito? Para calcular el arco asociado, simplemente multiplica la medida del ángulo inscrito por 2. ¡Así de simple! ¿Por qué son importantes los ángulos inscriptos en el diseño gráfico? Los ángulos inscriptos pueden afectar la simetría y el equilibrio visual de un diseño, haciendo que el arte sea más atractivo a los ojos. ¿Puedo usar las propiedades de los ángulos en la circunferencia para resolver problemas de la vida real? Absolutamente. Conocer estas propiedades puede ayudarte a abordar todo, desde problemas de diseño hasta cálculos en la ingeniería y la navegación. ¿Existen otros tipos de ángulos que se relacionan con la circunferencia? Sí, hay más tipos de ángulos, como los ángulos externos e internos, que tienen propiedades únicas y ofrecen perspectivas adicionales sobre los círculos y sus interacciones. Este artículo está optimizado para SEO y presenta un estilo conversacional que promueve la participación del lector. Se incluye una variedad de encabezados, ejemplos y preguntas frecuentes para mantener el contenido interesante y accesible. Dados un ángulo y una circunferencia nos podemos preguntar si podemos calcular la magnitud del ángulo dado con algún ángulo que tenga como vértice el centro de la circunferencia dada. En esta entrada estudiaremos algunos resultados que nos permitirán establecer dicha relación. Definición 1. Un ángulo central en una circunferencia es un ángulo formado por dos radios. Denotamos a una circunferencia con centro en O como $\Gamma (O)$. Definición 2. Decimos que un segmento es una cuerda de una circunferencia si sus extremos pertenecen a la circunferencia y el segmento no contiene al centro de la circunferencia, si contiene al centro entonces es un diámetro. Un ángulo inscrito en una circunferencia es un ángulo formado por dos cuerdas o una cuerda y un diámetro que tienen un extremo en común sobre la circunferencia. Teorema 1, de la medida del ángulo inscrito. Un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco de circunferencia. Demostración. Sea $\angle CBA$ un ángulo inscrito en $\Gamma (O)$. Caso 1. BC es diámetro, entonces $\triangle AOB$ es isósceles y por tanto $\angle BAO = \angle CBA$. Figura 1 Como $\angle COA$ es un ángulo exterior de $\triangle AOB$ entonces es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él, $\Rightarrow \angle COA = \angle CBA + \angle BAO = 2\angle CBA$$\Rightarrow \angle CBA = \dfrac{\angle COA}{2}$. Caso 2. Ambos lados del ángulo son cuerdas, trazamos el diámetro BO y consideramos $D = BO \cap \Gamma (O)$. Si AB y BC están en un mismo lado respecto de BD (izquierda figura 2), entonces $\angle CBA = \angle DBA – \angle DBC$ y por el caso 1,$\Rightarrow \angle CBA = \dfrac{\angle DOA}{2} – \dfrac{\angle DOC}{2} = \dfrac{\angle COA}{2}$. Figura 2 Si AB y BC están en lados distintos respecto de BD (derecha figura 2), entonces $\angle CBA = \angle CBD + \angle DBA$ y por el caso 1,$\Rightarrow \angle CBA = \dfrac{\angle COD}{2} + \dfrac{\angle DOA}{2} = \dfrac{\angle COA}{2}$. $\blacksquare$ Definición 3. Decimos que una recta es tangente a una circunferencia en un punto si la recta es perpendicular al radio que pasa por el punto. Definición 4. Decimos que un ángulo es semiinscrito en una circunferencia, si el ángulo está formado por una recta tangente a la circunferencia y una cuerda que tiene como extremo el punto de tangencia. Teorema 2, de la medida del ángulo semiinscrito. Un ángulo semiinscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco de circunferencia. Demostración. Sea $\angle CBA$ un ángulo inscrito en $\Gamma (O)$, con AB tangente a $\Gamma (O)$ en B, consideremos $D = BO \cap \Gamma (O)$. Figura 3 $\angle DBC$ es inscrito, por el teorema 1, $\angle DBC = \dfrac{\angle DOC}{2}$$\Rightarrow \angle CBA = \angle DBA – \angle DBC = \dfrac{\pi}{2} – \dfrac{\angle DOC}{2}$$= \dfrac{\angle DOB}{2} – \dfrac{\angle DOC}{2} = \dfrac{\angle COB}{2}$. Por otro lado, consideremos $A’ \in AB$ pero del lado opuesto a A respecto de B, entonces,$\angle A’BC = \angle ABD + \angle DBC = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\angle DOC}{2}$$= \dfrac{\angle BOD}{2} + \dfrac{\angle DOC}{2} = \dfrac{\angle BOC}{2}$. $\blacksquare$ Definición 5. Si el vértice de un ángulo está en el interior de una circunferencia decimos que el ángulo es interior a la circunferencia. Teorema 3, de la medida del ángulo interior. Un ángulo interior a una circunferencia es igual a la semisuma del ángulo central que abarca el mismo arco que el ángulo interior y del ángulo central que abarca el mismo arco que el opuesto por el vértice. Demostración. Sea $\angle ABC$ un ángulo interior a $\Gamma (O)$ con A, $C \in \Gamma (O)$, consideremos $A’ = AB \cap \Gamma (O)$ y $C’ = CB \cap \Gamma (O)$. Figura 4 Como $\angle ABC$ es un ángulo exterior de $\triangle A’BC$ es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él, además $\angle AA’C$ y $\angle A’CC’$ son inscritos y por el teorema 1,$\Rightarrow \angle ABC = \angle AA’C + \angle A’CC’ = \dfrac{\angle AOC + \angle A’OC’}{2}$. $\blacksquare$ Definición 6. Una recta secante a una circunferencia es una recta que la interseca en dos puntos distintos. Definición 7. Decimos que un ángulo es exterior a una circunferencia si su vértice se encuentra fuera de la circunferencia y los lados que forman el ángulo son tangentes o secantes a la circunferencia. Teorema 4, de la medida del ángulo exterior. Un ángulo exterior a una circunferencia es igual a la mitad de la diferencia de los ángulos centrales que abarcan arcos cuyos extremos son las intersecciones de cada lado del ángulo con la circunferencia. Caso 1. Ambos lados del ángulo son secantes a la circunferencia. Demostración. Sea $\angle BAC$ un ángulo exterior a $\Gamma (O)$. Supongamos que B, $C \in \Gamma (O)$ y consideremos $B’ = AB \cap \Gamma (O)$ y $C’ = AC \cap \Gamma (O)$. Veamos primero el caso particular en el que $CC’$ es diámetro entonces $\angle BC’C$ es un ángulo exterior de $\triangle AC’B$, por tanto,$\angle BC’C = \angle A + \angle C’BB’$ Figura 5 Como $\angle BC’C$ y $\angle C’BB’$ son ángulos inscritos, por el teorema 1,$\Rightarrow \angle A = \angle BC’C – \angle C’BB’ = \dfrac{\angle BOC – \angle C’OB’}{2}$. Para el caso general sean D y E las intersecciones de AO con $\Gamma (O)$. Si B y C están en lados distintos respecto de DE (izquierda figura 6), entonces$\angle A = \angle BAE + \angle EAC$, y por el caso particular,$\Rightarrow \angle BAE = \dfrac{\angle BOE – \angle DOB’}{2}$ y $\angle EAC = \dfrac{\angle EOC – \angle C’OD}{2}$$\Rightarrow \angle A = \dfrac{\angle BOE + \angle EOC – (\angle C’OD + \angle DOB’)}{2} = \dfrac{\angle BOC – \angle C’OB’}{2}$. Figura 6 Si B y C están en el mismo lado respecto de DE (derecha figura 6), entonces$\angle BAC = \angle BAE – \angle CAE$ y por el caso particular, $\angle BAE = \dfrac{\angle BOE – \angle DOB’}{2}$ y $\angle CAE = \dfrac{\angle COE – \angle DOC’}{2}$$\Rightarrow \angle A = \angle BAC = \dfrac{(\angle BOE – \angle COE) – (\angle DOB’ – \angle DOC’)}{2} = \dfrac{\angle BOC – \angle C’OB’}{2}$. $\blacksquare$ Caso 2. Ambos lados del ángulo son tangentes a la circunferencia. Demostración. Sea $\angle BAC$ un ángulo exterior a $\Gamma (O)$. Supongamos que B, $C \in \Gamma (O)$ y consideremos D y E las intersecciones de AO con $\Gamma (O)$. Figura 7 Como $\angle BDE$ y $\angle EDC$ son ángulos exteriores de $\triangle ADB$ y $\triangle ADC$ respectivamente, entonces$\angle BDE = \angle BAD + \angle DBA$ y $\angle EDC = \angle DAC + \angle ACD$$\Rightarrow \angle A = \angle BAD + \angle DAC = (\angle BDE – \angle DBA) + (\angle EDC – \angle ACD)$$ = (\angle BDE + \angle EDC) – (\angle ACD + \angle DBA) = \angle BDC – (\angle ACD + \angle DBA)$ $\angle ACD$ y $\angle DBA$ son ángulos semiinscritos y $\angle BDC$ es un ángulo inscrito, por los teoremas 1 y 2 tenemos$\angle ACD = \dfrac{\angle COD}{2}$, $\angle DBA = \dfrac{\angle DOB}{2}$ y $\angle BDC = \dfrac{\angle BOC}{2}$, $\Rightarrow \angle A = \dfrac{\angle BOC – (\angle COD + \angle DOB)}{2} = \dfrac{\angle BOC – \angle COB}{2}$. $\blacksquare$ Caso 3. Un lado del ángulo es tangente a la circunferencia y el otro es secante. La demostración de este caso queda como ejercicio. Proposición 1. Dos ángulos ya sean inscritos o semiinscritos que abarcan el mismo arco de circunferencia son iguales. Demostración. Por los teoremas 1 y 2, un ángulo inscrito y un ángulo semiinscrito son iguales a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco, si dos ángulos abarcan el mismo arco entonces el ángulo central es el mismo para ambos y por transitividad son iguales. $\blacksquare$ Figura 8 Teorema 5, de Tales. Sean A, B y C puntos distintos en una circunferencia entonces BC es diámetro si y solo si A es un ángulo recto. Demostración. Sea $\Gamma (O)$ la circunferencia a la que pertenecen A, B y C, el resultado se sigue del hecho de que el ángulo central que abarca el mismo arco que $\angle A$ es $\angle BOC$ y aplicar el teorema del ángulo inscrito. $\blacksquare$ Figura 9 Problema. Dado un círculo Γ construir su centro. Solución. Construimos dos ángulos rectos inscritos en la circunferencia, tomando dos puntos distintos como vértice. Por el teorema de Tales, las intersecciones de los lados de cada ángulo formaran dos diámetros distintos de la circunferencia y su intersección será el centro de la circunferencia. $\blacksquare$ Figura 10 Proposición 2. Las rectas tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia son iguales. Demostración. Sean $\Gamma (O)$ y A un punto exterior, por A trazamos AB y AC tangentes a $\Gamma (O)$ en B y en C respectivamente (figura 7). Consideremos los radios OB y OC entonces $OB = OC$, y por definición de tangencia, $OB \perp AB$ y $OC \perp AC$. Los triángulos rectángulos $\triangle AOB$ y $\triangle AOC$ tienen a AO como lado en común, por criterio de congruencia hipotenusa-cateto $\triangle AOB \cong \triangle AOC$, por tanto, $AB = AC$. $\blacksquare$ Apoyándonos de los resultados vistos aquí, en la siguiente entrada daremos una caracterización de arco de circunferencia y veremos la circunferencia de Apolonio. A continuación hay algunos ejercicios para que practiques los conceptos vistos en esta entrada. Te será de mucha utilidad intentarlos para entender más la teoría vista. Sean A y C dos puntos fijos en una circunferencia, muestra que para cualesquiera dos puntos B y D en la misma circunferencia se tiene que $\angle ABC = \angle ADC$ o $\angle ABC$ y $\angle CDA$ son suplementarios. Prueba que una recta es tangente a una circunferencia si y solo si la recta y la circunferencia tienen un solo punto en común. Demuestra el teorema 4 en el caso en el que el un lado del ángulo exterior es secante a la circunferencia y el otro es tangente, es decir, en la figura 11 muestra que $\angle BAC = \dfrac{\angle BOC – \angle COD}{2}$. Figura 11 Dados una circunferencia y un punto fuera de ella, construye las rectas tangentes a la circunferencia dada trazadas desde el punto dado. Sean $\triangle ABC$, K la intersección de la altura trazada desde A con el circuncírculo de $\triangle ABC$ y H el ortocentro de $\triangle ABC$, muestra que BC biseca a HK. Figura 12

Santos, J., Tesis Geometría del Cuadrilátero. 2010, pp 133-140. Gomez, A. y Bulajich, R., Geometría. México: Instituto de Matemáticas, 2002, pp 34-40. Wikipedia Geometría interactiva Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104522 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM – Etapa 2»